

und  $A^I B^{VII}$ -Verbindungen – eher noch als in den  $A^{III} B^V$ -Verbindungen – Ionen-Zustände vorliegen, ist eine Übertragung der hier angestellten Betrachtungen auf diese Verbindungsgruppe ohne jede Einschränkung möglich \*.

Selbstverständlich ist die Darstellung der geschilderten Zusammenhänge auch in der kovalenten Näherung möglich. Da man hierbei aber den realen End-Zustand erst durch Umladung aller Atomlagen

aus dem Ausgangszustand erhält, ist dieser Weg nicht so übersichtlich wie der hier beschriebene, der den ionogenen Zustand als Ausgangszustand benutzt. Es wird daher auf eine entsprechende Beschreibung – die nichts wesentlich Neues bringen kann – verzichtet.

\* Aber auch in anderen Verbindungsklassen ist die hier herausgearbeitete Abhängigkeit von  $\Delta E$  mit der Polarisation zu beobachten.

## Einfluß von Inhomogenitäten auf die ferromagnetische Resonanz in Metallen\*

Von W. DÖRING und H. VIAL

Institut für theoretische Physik der Justus-Liebig-Universität Gießen  
(Z. Naturforschg. 15 a, 434–447 [1960]; eingegangen am 5. März 1960)

Für ein ferromagnetisches, polykristallines Metall wird der Einfluß der magnetischen Inhomogenitäten und des magnetischen Streufeldes auf die Breite der Resonanzkurve der Permeabilität für ein hochfrequentes magnetisches Wechselfeld senkrecht zu einem zur Sättigung ausreichenden Gleichfeld  $H_0$  untersucht. Das Streufeld röhrt einerseits von dem von Kristallit zu Kristallit wechselnden Einfluß der Kristallenergie her, andererseits von den Quellen der Magnetisierung an der rauen Oberfläche. Wenn die mittlere Ausdehnung  $c$  der Kristallite und der Ausbeulungen der rauen Oberfläche klein gegen die Eindringtiefe  $\zeta$  der Wirbelströme ist, ist der Einfluß der Inhomogenitäten gering und wirkt wie ein Zusatz zu der Dämpfungskonstante der LANDAU–LIFSHITZ-Formel proportional  $(2 K/M H_0)^2$  ( $K$ =Konstante der Kristallenergie,  $M$ =Sättigungsmagnetisierung). Wenn diese Ausdehnung  $c$  groß gegen die Eindringtiefe  $\zeta$  ist, hängt das Verhalten davon ab, ob das  $\mu$ -fache der Eindringtiefe groß oder klein gegen  $c$  ist ( $\mu$ =Betrag der Wechselfeldpermeabilität). Wenn  $c$  groß gegen  $\mu \zeta$  ist, ist die Wurzel aus der makroskopisch gemessenen komplexen Permeabilität gleich dem Mittel über die Wurzel aus der lokalen Permeabilität über die Oberfläche. Wenn dagegen  $c$  klein gegen  $\mu \zeta$  ist, ist die dazu reziproke Größe über die Oberfläche zu mitteln. Unter der Annahme, daß die Verteilung der lokalen Werte von  $1/\mu$  durch eine GAUSSche Fehlerkurve gegeben ist, wird die Resonanzkurve der Permeabilität berechnet.

Läßt man auf ein magnetisch gesättigtes, ferromagnetisches Metall ein hochfrequentes Wechselfeld senkrecht zum Gleichfeld einwirken, so durchläuft die Wechselfeld-Permeabilität bei konstantem Gleichfeld in Abhängigkeit von der Frequenz oder bei fester Frequenz in Abhängigkeit von der Gleichfeldstärke eine Resonanzkurve<sup>1</sup>. Ihr Maximum liegt da, wo die Frequenz des Wechselfeldes mit der Präzessionsfrequenz der Magnetisierung übereinstimmt. Aus der Breite der Resonanzkurve schließt man auf die Größe der Dämpfung der Schwingung der Magnetisierung. Man führt zu diesem Zweck, nach dem Vorbild von LANDAU und LIFSHITZ<sup>2</sup>, in die Bewegungsgleichung der Magnetisierung phänomenologisch ein Dämpfungsglied ein, welches nach einer Auslenkung der Magnetisierung die Geschwindigkeit

der Rückkehr in den Gleichgewichtszustand bestimmt. Außerdem aber muß jede Inhomogenität eine Verbreiterung der Resonanzkurve bedingen, weil dann die Resonanz an verschiedenen Stellen bei etwas verschiedenen Frequenzen bzw. bei etwas verschiedenen Werten der Gleichfeldstärke auftritt. Wenn man also aus der gemessenen Halbwertsbreite die Größe der wahren Dämpfung entnehmen will, muß man vorher den Einfluß der Inhomogenitäten berechnen und in Abzug bringen. Eine erste Ursache für magnetische Inhomogenitäten sind die Kristallbaufehler, die im Ferromagnetismus meist als innere Spannungen aufgefaßt werden. In einem polykristallinen Material bildet die Kristallenergie eine zweite Ursache. Der Einfluß dieser Effekte auf die Halbwertsbreite scheint gering zu sein. Denn wenn man

\* Diese Arbeit enthält die Ergebnisse der Gießener Dissertation von H. VIAL.

<sup>1</sup> J. H. E. GRIFFITHS, Nature, Lond. **158**, 670 [1946]; C. KIRTEL, Phys. Rev. **71**, 270 [1947].

<sup>2</sup> L. LANDAU u. E. LIFSHITZ, Phys. Z., USSR **8**, 153 [1935].



die Resonanzkurve bei fester Frequenz durch Änderung der Gleichfeldstärke durchläuft, findet man für die Halbwertsbreite im Feldstärkenmaßstab wesentlich größere Werte als die Feldstärken, die auf die Magnetisierung die gleichen Drehmomente wie die Kristallenergie und die inneren Spannungen ausüben. Bei Metallen, bei denen die Wechselmagnetisierung wegen des Skineffektes nur eine sehr dünne Oberflächenschicht erfaßt, muß man ferner den Einfluß der Oberflächenrauhigkeit berücksichtigen. Wie im folgenden gezeigt werden soll, ist ihr direkter Einfluß auf die Halbwertsbreite der Resonanz klein gegen ihren indirekten Einfluß durch das von ihr erzeugte magnetische Streufeld, welches die Quellen und Senken der Magnetisierung an einer rauen Oberfläche hervorrufen. Die Messungen von ZEHLER<sup>3</sup> an dünnen Drähten deuten darauf hin, daß manchmal der Einfluß der Oberflächenrauhigkeit auf die Halbwertsbreite überwiegt. Bei der Berechnung ihrer Wirkung genügt die Betrachtung einer Oberfläche, die im makroskopischen Sinne eben ist und von einer linear polarisierten ebenen Welle senkrecht getroffen wird. Man bestimmt für diesen Fall den komplexen Reflexionskoeffizienten  $R$ . Die Eindringtiefe des Wechselfeldes liegt in Metallen in dem betrachteten Frequenzbereich von etwa 10<sup>10</sup> Hz in der Größenordnung von 10<sup>-4</sup> bis 10<sup>-5</sup> cm. Da sie also auch noch an Drähten von 1/10 mm Durchmesser klein gegen den Krümmungsradius ist, wird bei der Untersuchung eines ferromagnetischen Metalles als Wandung eines Hohlraumresonators auch nur diese Größe  $R$  bestimmt. Die in der Literatur angegebenen gemessenen Werte der komplexen Permeabilität bedeuten stets die Permeabilität eines homogenen Materials mit ideal glatter Oberfläche, welche beim Einsetzen in die Formel für  $R$  den gemessenen Wert des Reflexionsvermögens liefern würde.

## I. Der Tensor der reziproken Permeabilität

Die Grundlage der folgenden Berechnungen bildet die folgende Bewegungsgleichung für den Magnetisierungsvektor  $\mathfrak{M}$ :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = [\mathfrak{M}, \mathfrak{H} + \tilde{\mathfrak{H}}'] - \frac{\delta}{M} [\mathfrak{M}[\mathfrak{M}, \mathfrak{H} + \tilde{\mathfrak{H}}']] \quad (1)$$

( $\gamma$  = gyromagnetisches Verhältnis;  $|\mathfrak{M}| = M$ ). Sie unterscheidet sich von dem üblichen Ansatz dadurch, daß zu dem äußeren Magnetfeld  $\mathfrak{H}$  noch ein Ersatzmagnetfeld  $\tilde{\mathfrak{H}}'$  hinzugefügt wurde, welches die Wirkung der inneren Spannungen und der Kristallener-

gie wiedergibt. Betrachtet man einen kubischen Kristall, dessen Kristallachsen die Richtungen der Einheitsvektoren  $a_1, a_2, a_3$  haben, so lautet die Kristallenergie in erster Näherung

$$F_K = K(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2). \quad (2)$$

$$\text{Darin sind } a_j = (\mathfrak{M} a_j)/M \quad (3)$$

die Richtungscosinus der Magnetisierung. Die erste Komponente  $D_1$  des Drehmomentes der Kristallenergie auf die Magnetisierung beträgt pro Volumeneinheit

$$D_1 = a_3 \frac{\partial F_K}{\partial a_2} - a_2 \frac{\partial F_K}{\partial a_3} = 2K(a_2 a_3^3 - a_3 a_2^3). \quad (4)$$

Zusammen mit den entsprechenden Formeln für die anderen Komponenten erhält man wegen

$$\mathfrak{M} = M(a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3)$$

für den Vektor  $\mathfrak{D}$  der Drehmomentdichte

$$\mathfrak{D} = [\mathfrak{M} \tilde{\mathfrak{H}}'] \text{ mit } \tilde{\mathfrak{H}}' = \frac{2K}{M} (a_1^3 a_1 + a_2^3 a_2 + a_3^3 a_3). \quad (5)$$

Für einen hexagonalen Kristall ( $a_3 \parallel$  hexagonale Achse) folgt aus

$$F_K = -K a_3^2 \quad (6)$$

$$\text{auf dieselbe Weise } \tilde{\mathfrak{H}}' = \frac{2K}{M} a_3 a_3. \quad (7)$$

Derselbe Ausdruck gilt für ein Material mit isotroper Magnetostriktion beim Vorhandensein einer Zugspannung  $Z$  in Richtung  $a_3$ , nur ist dann  $K$  durch  $3\lambda Z/2$  zu ersetzen.

Nun werde  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $\tilde{\mathfrak{H}}'$  zerlegt in einen konstanten Anteil (Index s = statisch) und einen periodischen Anteil mit der Kreisfrequenz  $\omega$ :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_s + \Re \{ \tilde{\mathfrak{M}} e^{i\omega t} \}; \quad \mathfrak{H} + \tilde{\mathfrak{H}}' = \mathfrak{H}_s + \tilde{\mathfrak{H}}'_s + \Re \{ (\tilde{\mathfrak{H}} + \tilde{\mathfrak{H}}') e^{i\omega t} \}. \quad (8)$$

Die periodischen Anteile werden als klein angesehen. Ihre Produkte werden beim Einsetzen in (1) vernachlässigt. Dann ergibt sich

$$[\mathfrak{M}_s, \mathfrak{H}_s + \tilde{\mathfrak{H}}'_s] = 0 \quad (9)$$

und

$$\frac{i\omega}{\gamma} \tilde{\mathfrak{M}} = [\mathfrak{M}_s, \tilde{\mathfrak{H}} + \tilde{\mathfrak{H}}'] + [\tilde{\mathfrak{M}}, \mathfrak{H}_s + \tilde{\mathfrak{H}}'_s] \quad (10)$$

$$- \frac{\delta}{M} [\mathfrak{M}_s \{ [\mathfrak{M}_s, \tilde{\mathfrak{H}} + \tilde{\mathfrak{H}}'] + [\tilde{\mathfrak{M}}, \mathfrak{H}_s + \tilde{\mathfrak{H}}'_s] \}] .$$

Nun führen wir ein Koordinatensystem ein, dessen  $x$ -Achse senkrecht zur Metalloberfläche ist und ins

<sup>3</sup> V. ZEHLER, Z. Naturforschg. 12 a, 433, 437, u. 441 [1957].

Innere hinein weist. Die  $z$ -Achse habe die Richtung des äußeren Gleichfeldes. In nullter Näherung, also für ein homogenes Material mit ideal glatter Oberfläche und ohne Kristallenergie, ist  $\tilde{\mathfrak{H}}_s'$  und  $\tilde{\mathfrak{H}}'$  gleich null;  $\mathfrak{M}_s$  und  $\tilde{\mathfrak{H}}_s$  sind parallel zur  $z$ -Achse,  $\tilde{\mathfrak{H}}$  und  $\tilde{\mathfrak{M}}$  senkrecht dazu. Alle Abweichungen davon betrachten wir als klein. Produkte der Abweichungen werden

$$\frac{i\omega}{\gamma H_0} \tilde{M}_x = -S \tilde{M}_x + \left( \frac{H_{sz}}{H_0} + T \right) \tilde{M}_y - \frac{M}{H_0} \tilde{H}_y + \delta \left\{ -\left( \frac{H_{sz}}{H_0} + U \right) \tilde{M}_x + S \tilde{M}_y + \frac{M}{H_0} \tilde{H}_x \right\}, \quad (12 \text{ a})$$

$$\frac{i\omega}{\gamma H_0} \tilde{M}_y = -\left( \frac{H_{sz}}{H_0} + U \right) \tilde{M}_x + S \tilde{M}_y + \frac{M}{H_0} \tilde{H}_x - \delta \left\{ -S \tilde{M}_x + \left( \frac{H_{sz}}{H_0} + T \right) \tilde{M}_y - \frac{M}{H_0} \tilde{H}_y \right\}. \quad (12 \text{ b})$$

Darin bedeutet  $H_0$  das konstante äußere Gleichfeld.  $S, T$  und  $U$  sind beim hexagonalen Kristall

$$S = \frac{2K}{MH_0} a_{3x} a_{3y}; \quad T = \frac{2K}{MH_0} (a_{3z}^2 - a_{3y}^2); \quad U = \frac{2K}{MH_0} (a_{3z}^2 - a_{3x}^2). \quad (13 \text{ a})$$

Für einen kubischen Kristall ergibt sich aus (5)

$$S = \frac{2K}{MH_0} 3 \sum_{l=1}^3 a_{lx} a_{ly} a_{lz}^2; \quad T = \frac{2K}{MH_0} \sum_{l=1}^3 (a_{lz}^4 - 3a_{ly}^2 a_{lz}^2); \quad U = \frac{2K}{MH_0} \sum_{l=1}^3 (a_{lz}^4 - 3a_{lx}^2 a_{lz}^2). \quad (13 \text{ b})$$

$S, T$  und  $U$  sind dimensionslos und dem Betrage nach klein gegen 1. Im Polykristall sind sie ortsabhängig, aber bei regelloser Kristallorientierung im räumlichen Mittel gleich null. Quadrate und Produkte der Größen  $S, T, U$  und  $(H_{sz} - H_0)/H_0$  wurden bei der Ableitung von (12) gegen 1 vernachlässigt. Für  $\tilde{M}_z$  ergibt sich aus (10) eine Gleichung, in welcher auf der rechten Seite alle Koeffizienten der Wechselamplituden von dieser vernachlässigten Größenordnung sind, so daß in dieser Näherung  $\tilde{M}_z = 0$  ist.

Aus (12) ergibt sich eine tensorielle Beziehung zwischen  $\tilde{\mathfrak{M}}$  und  $\tilde{\mathfrak{H}}$  mit ortsabhängigen Koeffizienten. Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, nicht diesen Tensor der magnetischen Suszeptibilität zu benutzen, sondern denjenigen der reziproken Permeabilität. Wir führen deshalb den Vektor der Wechselinduktion ein durch

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \mu_0 \tilde{\mathfrak{H}} + \tilde{\mathfrak{M}} \quad (14)$$

und drücken  $\tilde{\mathfrak{H}}$  als lineare Funktion von  $\tilde{\mathfrak{B}}$  aus:

Dann erhält man bei Vernachlässigung aller Quadrate kleiner Größen

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ (1+\alpha) \frac{H_{sz}-H_0}{H_0} + U + \alpha T - 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{i(1+\alpha)}{V\alpha} \delta \right\}, \\ z_{yy} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ (1+\alpha) \frac{H_{sz}-H_0}{H_0} + T + \alpha U - 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{i(1+\alpha)}{V\alpha} \delta \right\}, \\ z_{xy} &= i V\alpha \left\{ 1 - \frac{2\alpha}{1-\alpha} \frac{H_{sz}-H_0}{H_0} - \frac{\alpha}{1-\alpha} (U+T) + i V\alpha S + \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{2i V\alpha}{1-\alpha} \delta \right\}, \\ z_{yx} &= -i V\alpha \left\{ 1 - \frac{2\alpha}{1-\alpha} \frac{H_{sz}-H_0}{H_0} - \frac{\alpha}{1-\alpha} (U+T) - i V\alpha S + \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{2i V\alpha}{1-\alpha} \delta \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

vernachlässigt. Da  $\tilde{\mathfrak{H}}'$  selbst klein ist, genügt es, in (5) und (7) die nullte Näherung für  $\tilde{\mathfrak{M}}$  einzusetzen. Das ergibt für den hexagonalen Kristall

$$\tilde{\mathfrak{H}}_s' = \frac{2K}{M} a_{3z} a_3; \quad \tilde{\mathfrak{H}}' = \frac{2K}{M} \left( a_{3x} \frac{\tilde{M}_x}{M} + a_{3y} \frac{\tilde{M}_y}{M} \right) a_3. \quad (11)$$

Dann folgt aus (10) nach elementarer Rechnung

$$\mu_0 \tilde{\mathfrak{H}} = z \tilde{\mathfrak{B}}. \quad (15)$$

Für den Tensor  $z$  erhält man die Gestalt

$$z = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} & 0 \\ z_{yx} & z_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Die Komponenten  $z_{jk}$  kann man aus (12) leicht streng ausrechnen. Da aber oben bereits die Quadrate von  $S, T, U$  und  $(H_{sz} - H_0)/H_0$  vernachlässigt wurden, ist es inkonsistent, dies hier nicht zu tun. Zugleich wollen wir weiter voraussetzen, daß  $\delta \ll 1$  ist und daß  $\omega$  nur wenig von der Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \gamma \sqrt{\frac{H_0 B_0}{\mu_0}} \quad (17)$$

abweicht, also  $(\omega - \omega_0)/\omega_0 = \Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ . Zur Abkürzung schreiben wir ferner

$$\mu_0 H_0 / B_0 = z. \quad (18)$$

$z$  ist bei kleinen Gleichfeldern klein und wird in sehr starken Feldern gleich 1. Bei den meisten Messungen liegt  $z$  etwa bei  $\frac{1}{2}$ .

Wir werden sehen, daß die Abweichung des statischen Feldes  $H_{sz}$  von  $H_0$ , welche von der Rauhigkeit der Oberfläche und den Inhomogenitäten des Materials herrührt, im Mittel verschwindet. Für die räumlichen Mittelwerte der Komponenten von  $\alpha$  gilt daher

$$\overline{\alpha_{xx}} = \overline{\alpha_{yy}} = \alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ \frac{i(1+\alpha)}{V^\alpha} \delta - 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right\}, \quad (20)$$

Nach (19) gilt also:

$$\begin{aligned} \alpha_{xx}^{(1)} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ U + \alpha T + (1+\alpha) \frac{H_{sz}-H_0}{H_0} \right\}, & \alpha_{yy}^{(1)} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ T + \alpha U + (1+\alpha) \frac{H_{sz}-H_0}{H_0} \right\}, \\ \alpha_{xy}^{(1)} &= -\frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ (1-\alpha) S + i V^\alpha (U+T) + 2i V^\alpha \frac{H_{sz}-H_0}{H_0} \right\}, \\ \alpha_{yx}^{(1)} &= -\frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ (1-\alpha) S - i V^\alpha (U+T) - 2i V^\alpha \frac{H_{sz}-H_0}{H_0} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

## II. Das statische Streufeld

Die Berechnung von  $(H_{sz}-H_0)/H_0$  geht von der Vektorgleichung (9) aus. In erster Näherung hat  $\mathfrak{M}_s$  und  $\mathfrak{H}_s$  die  $z$ -Richtung und den Betrag  $M$  bzw.  $H_0$ . Berücksichtigt man alle Abweichungen davon nur bis zur ersten Potenz, so folgt daraus wegen  $\mathfrak{B}_s = \mu_0 \mathfrak{H}_s + \mathfrak{M}_s$  mit der Abkürzung  $B_0 = \mu_0 H_0 + M$

$$B_{sx} = \frac{B_0}{H_0} H_{sx} + \frac{M}{H_0} H'_{sx}; \quad B_{sy} = \frac{B_0}{H_0} H_{sy} + \frac{M}{H_0} H'_{sy}; \quad (23 \text{ a})$$

$$B_{sz} = \mu_0 H_{sz} + M. \quad (23 \text{ b})$$

Da das statische Feld wirbelfrei ist, kann  $\mathfrak{H}_s$  als negativer Gradient einer Potentialfunktion geschrieben werden, die mit  $\Phi - H_0 z$  bezeichnet werden soll. Aus  $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$  ergibt sich dann

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = (1-\alpha) \left( \frac{\partial H_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{sy}}{\partial y} \right). \quad (24)$$

Wir betrachten nun ein Teilstück des Körpers von der Form eines Würfels der Kantenlänge  $L$ , dessen eine Seite mit der Metalloberfläche zusammenfällt.  $L$  soll dabei groß gegen die mittlere Periodenlänge aller Gitterfehler und gegen die Kristallitgröße sein. Eine periodische Fortsetzung von  $\mathfrak{H}'$  über die Grenzen dieses Normierungsvolumens hinaus ins Metallinnere und eine periodische Fortsetzung der rauen Oberflächengestalt über die eine Würfelseite der Fläche  $L^2$  hinaus bewirkt dann keine wesentliche Abweichung von dem Verhalten eines wirklichen Metallstückes, in welchem diese Unregelmäßigkeiten nicht periodisch sind. Im Metallinnern, also für  $x > 0$ ,

$$\overline{\alpha_{xy}} = -\overline{\alpha_{yx}} = i b = i V^\alpha \left\{ 1 - \frac{2i V^\alpha}{1-\alpha} \delta + \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right\}.$$

Wenn  $\delta = 0$  wäre, wären  $a$  und  $b$  reell. Unter obigen Annahmen ist  $|a| \ll 1$ , dagegen  $b \approx V^\alpha$ , also in der Größenordnung von 1. Die Abweichungen der Komponenten von  $\alpha$  von ihren Mittelwerten bezeichnen wir im folgenden mit dem oberen Index 1, also

$$\alpha_{jk} = \overline{\alpha_{jk}} + \alpha_{jk}^{(1)}. \quad (21)$$

kann man dann  $H'_x$  und  $H'_y$  in eine FOURIER-Reihe entwickeln der Form

$$H'_{sx} = \sum_j X_j e^{i(\mathfrak{k}_j \mathfrak{r})}, \quad H'_{sy} = \sum_j Y_j e^{i(\mathfrak{k}_j \mathfrak{r})}. \quad (25)$$

Dabei ist  $\mathfrak{k}_j$  ein Vektor mit den Komponenten

$$k_{jx} = \frac{2\pi}{L} n_{xj}; \quad k_{jy} = \frac{2\pi}{L} n_{yj}; \quad k_{jz} = \frac{2\pi}{L} n_{zj}. \quad (26)$$

Der Summationsindex  $j$  durchläuft alle Tripel der ganzen Zahlen  $(n_{xj}, n_{yj}, n_{zj})$ . Für  $\Phi$  machen wir den Ansatz

$$\Phi = \sum_j \Phi_j e^{i(\mathfrak{k}_j \mathfrak{r})} + \Phi'. \quad (27)$$

Dabei soll der erste Summand eine Lösung der inhomogenen Gl. (24) liefern.  $\Phi'$  soll für die Befriedigung der Randbedingungen an der Oberfläche sorgen und Lösung der homogenen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} = 0 \quad (28)$$

sein. Einsetzen von (25) und (27) in (24) liefert

$$\Phi_j = -i(1-\alpha) \frac{k_{jx} X_j + k_{jy} Y_j}{k_{jx}^2 + k_{jy}^2 + \alpha k_{jz}^2}. \quad (29)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung entwickeln wir entsprechend in eine FOURIER-Reihe, jedoch ist dort nur über die  $y$ - und  $z$ -Komponenten der Ausbreitungsvektoren  $\mathfrak{k}_j$  zu summieren. Bezeichnet man mit  $\mathfrak{h}_l$  einen Vektor senkrecht zur  $x$ -Achse, so ist

$$\Phi' = \sum_l \Phi'_l e^{i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r}) - V h_{ly}^2 + \alpha h_{lz}^2 x} \quad (30)$$

mit beliebigem  $\Phi'_l$  eine Lösung von (28), welche für  $x \rightarrow \infty$  verschwindet. Sie ist zur Befriedigung der Randbedingungen geeignet, wenn man für  $\mathfrak{h}_l$  einen Vektor mit den Komponenten

$$h_{lx} = 0, \quad h_{ly} = \frac{2\pi}{L} n_{yl}; \quad h_{lz} = \frac{2\pi}{L} n_{zl}$$

einsetzt und bei der Summation über  $l$  alle Paare von ganzen Zahlen  $n_{yl}, n_{zl}$  durchläuft.

Außerhalb des Metalles, wo das entsprechend definierte magnetostatische Potential  $\Phi''$  der Differentialgleichung  $\Delta\Phi'' = 0$  genügen muß, kann man ansetzen:

$$\Phi'' = \sum_l \Phi_l'' e^{i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r}) + \sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2} x}. \quad (31)$$

Die Oberfläche sei durch  $x = f(y, z)$  gegeben. Da sie in makroskopischer Näherung bei  $x = 0$  liegen soll, ist  $f$  im Mittel über alle mikroskopischen Unregelmäßigkeiten gleich null. Für  $f(y, z)$  machen wir einen analogen FOURIER-Ansatz der Periode  $L$ :

$$f(y, z) = \sum_l f_l e^{i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r})}. \quad (32)$$

---


$$\mu_0 \left[ \frac{\partial \Phi''}{\partial x} - f_y \frac{\partial \Phi''}{\partial y} + f_z \left( H_0 - \frac{\partial \Phi''}{\partial z} \right) \right] = - \left[ - \frac{B_0}{H_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{M}{H_0} H'_{sx} \right] \quad (35)$$

$$+ f_y \left[ - \frac{B_0}{H_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{M}{H_0} H'_{sy} \right] + f_z \left[ B_0 - \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]$$

$$\text{oder in linearer Näherung} \quad \alpha \frac{\partial \Phi''}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1 - \alpha) H_0 f_z - (1 - \alpha) H'_{sx} \quad (36)$$

Einsetzen von (27), (30), (31), (32) und (34) liefert durch Vergleich der FOURIER-Koeffizienten rechts und links

$$\Phi'_l = \frac{i(1-\alpha) H_0 h_{lz} f_l - (1-\alpha) \sum_{n_{xj}} X_j - \sum_{n_{xj}} (\alpha \sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2} - i k_{jx}) \Phi_j}{\alpha \sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2} + \sqrt{h_{ly}^2 + \alpha h_{lz}^2}}. \quad (37)$$

Setzt man das in (30) und (27) ein, so erhält man für das Metallinnere

$$\begin{aligned} \frac{H_{sz} - H_0}{H_0} &= - \frac{(1-\alpha)}{H_0} \sum_j \frac{k_{jz}(k_{jx} X_j + k_{jy} Y_j)}{(k_{jx}^2 + k_{jy}^2 + \alpha k_{jz}^2)} e^{i(\mathfrak{t}_j \mathfrak{r})} \\ &+ \frac{(1-\alpha)}{H_0} \sum_l \frac{\alpha k_{jz} \sqrt{k_{jy}^2 + k_{jz}^2} (k_{jx} X_j + k_{jy} Y_j) + i k_{jz} (k_{jy}^2 + \alpha k_{jz}^2) X_j - i k_{jx} k_{jy} k_{jz} Y_j}{(k_{jx}^2 + k_{jy}^2 + \alpha k_{jz}^2) (\alpha \sqrt{k_{jy}^2 + k_{jz}^2} + \sqrt{k_{jy}^2 + \alpha k_{jz}^2})} e^{i(k_{jy} y + k_{jz} z) - \sqrt{k_{jy}^2 + \alpha k_{jz}^2} x} \\ &+ (1-\alpha) \sum_l \frac{h_{lz}^2 f_l}{\alpha \sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2} + \sqrt{h_{ly}^2 + \alpha h_{lz}^2}} e^{i(\mathfrak{h}_l \mathfrak{r}) - \sqrt{h_{ly}^2 + \alpha h_{lz}^2} x}. \end{aligned} \quad (38)$$

Der erste Summand ist das Streufeld infolge der Kristallgrenzen im Innern. Der zweite Summand ist das zusätzliche Feld, welches dieses Streufeld an der Oberfläche hervorruft. Der dritte Summand ist das Feld, welches von der Rauigkeit der Oberfläche her-

führt. Die weitere Diskussion dieser etwas unübersichtlichen Formel beschränken wir auf 3 Extremfälle.

1. Wir nehmen an, daß die mittlere Ausdehnung der Kristallite und der Unregelmäßigkeiten

$$\Phi'' = \sum_l \Phi_l e^{i(\mathfrak{t}_l \mathfrak{r})} + \Phi' \quad \text{für } x = f(y, z). \quad (33)$$

Da  $\Phi$  das Potential des Streufeldes allein ist, nicht das des homogenen äußeren Feldes in  $z$ -Richtung, ist bei störungsfreiem Metall und glatter Oberfläche, also für  $\mathfrak{H}'_s = 0$  und  $f = 0$  auch  $\Phi'' = \Phi' = \Phi_l = 0$ . In der ersten, linearen Näherung kann man daher im Exponenten  $x = 0$  setzen und erhält für jedes Wertepaar  $n_{yl}, n_{zl}$

$$\Phi_l'' = \sum_{n_{xj}} \Phi_j + \Phi'_l. \quad (34)$$

In der Summe ist über alle  $n_{xj}$  zu summieren bei festen  $n_{yy} = n_{yl}$  und  $n_{zz} = n_{zl}$ . Aus der Stetigkeit der Normalkomponente von  $\mathfrak{B}$  folgt wegen (23) und  $H_{sz} - H_0 = -\partial \Phi / \partial z$  weiterhin

an der Oberfläche klein gegen die Eindringtiefe  $\zeta$  des magnetischen Wechselfeldes ist. Dann ist bei den Summanden, die in Gl. (38) wesentlich sind,  $\sqrt{k_{jx}^2 + k_{jy}^2 + k_{jz}^2}$  groß gegen  $1/\zeta$ . Im größten Teil der Zone, in der eine Wechselmagnetisierung statt-

findet, sind dann die exponentiell mit  $x$  abnehmenden Summanden in (38) klein. Man kann in diesem Fall den ersten Summanden als allein wesentlich ansehen. Für den quadratischen Mittelwert erhält man daher

$$\left(\frac{H_{sz} - H_0}{H_0}\right)^2 = \frac{(1-\alpha)^2}{H_0^2} \sum_{j,j'} \frac{k_{jz} k_{j'z} (k_{jx} X_j + k_{jy} Y_j) (k_{j'x} X_{j'}^* + k_{j'y} Y_{j'}^*)}{(k_{jx}^2 + k_{jy}^2 + \alpha k_{jz}^2) (k_{j'x}^2 + k_{j'y}^2 + \alpha k_{j'z}^2)} e^{i(t_j - t_{j'}, v)} . \quad (39)$$

Die räumliche Mittelung liefert rechts null für alle Summanden  $j \neq j'$ . Aus (25) folgt weiter

$$\overline{X_j X_j^*} = \frac{1}{L^6} \int \int \int \int \int \int H'_{sx}(r) H'_{sx}(r') e^{i(t_j, v - v')} dv dv' . \quad (40)$$

Mittelt man diese Größe über alle Orientierungen der Kristallite, so erhält man für  $H'_{sx}(r) H'_{sx}(r')$  null, wenn  $r$  und  $r'$  zu Punkten in verschiedenen Kristalliten weisen. Für Punkte im gleichen Kristallit erhält man dagegen nach (11) im Mittel über alle Richtungen für einen hexagonalen Polykristall mit regelloser Kristallorientierung

$$H'_{sx}(r) H'_{sx}(r') = H'_{sy}(r) H'_{sy}(r') = \left(\frac{2K}{M}\right)^2 \frac{1}{15} \quad (41)$$

$$\text{und } H'_{sx}(r) H'_{sy}(r') = 0 . \quad (42)$$

Für kubische Kristalle ist der Faktor  $\beta_{\text{hex}} = 1/15$  durch  $\beta_{\text{kub}} = 2/105$  zu ersetzen. Mit der Abkürzung

$$\delta(r, r') = \begin{cases} 1, & \text{falls } r \text{ und } r' \text{ zu Punkten im} \\ & \text{gleichen Kristall weisen,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (43)$$

erhält man demnach

$$\overline{X_j X_j^*} = \overline{Y_j Y_j^*} \quad (44)$$

$$= \left(\frac{2K}{M}\right)^2 \beta \frac{1}{L^6} \int \int \int \int \int \int \delta(r, r') e^{i(t_j, v - v')} dv dv' .$$

Für die weitere Auswertung nehmen wir an, daß die Kristallite im Mittel als kugelförmig angenommen werden können. Dann ist das verbleibende Integral nur vom Betrag  $|f_j|$  des Ausbreitungsvektors abhängig. Die sonstigen Faktoren in (39) sind nur von der Richtung von  $f_j$  abhängig. Integration über alle Richtungen von  $f_j$  und nach Ausführung des Integrals in (44) über ein kugelförmiges Volumen auch über den Betrag liefert nach längeren elementaren Zwischenrechnungen

$$\left(\frac{H_{sz} - H_0}{H_0}\right)^2 = \beta \left(\frac{2K}{MH_0}\right) F(\alpha) \quad (45)$$

$$\text{mit } F(\alpha) = \frac{2+\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3}{2} .$$

Diese Funktion lautet für  $(1-\alpha) \ll 1$  näherungsweise

$$F(\alpha) = \frac{2}{15}(1-\alpha)^2 + \frac{4}{35}(1-\alpha)^3 + \frac{2}{21}(1-\alpha)^4 + \dots .$$

Diese Näherungsformel ist noch bis  $\alpha \approx \frac{1}{2}$  brauchbar. Für  $\alpha = \frac{1}{2}$  ist  $F(\alpha) \approx 0,053$ .

2. Ist die Oberfläche ideal glatt und die mittlere Ausdehnung der Kristallite groß gegen die Eindringtiefe  $\zeta$ , so sind in (38) nur die ersten beiden Summen von null verschieden; bei den wesentlichen Summanden ist ferner in dem Gebiet, in welchem das Wechselfeld merklich ist,

$$|k_{jx} x| \ll 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{k_{jy}^2 + \alpha k_{jz}^2} x \ll 1 .$$

Setzt man demnach  $x = 0$  und mittelt über den Ort und alle Kristallorientierungen, so erhält man für  $[(H_{sz} - H_0)/H_0]^2$  ein ähnliches Ergebnis wie (45), nur ist  $F(\alpha)$  zu ersetzen durch

$$G(\alpha) = \frac{1-\alpha}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 - (2-\alpha) \cos^2 \varphi}{(\alpha + \sqrt{\sin^2 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi})^2} \cdot \left\{ \frac{\arctg \frac{\cos \varphi \sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi}}}{\cos \varphi \sqrt{1-\alpha} \sqrt{\sin^2 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi}} - 1 \right\} d\varphi . \quad (46)$$

Für  $(1-\alpha) \ll 1$  folgt daraus

$$G(\alpha) = \frac{5}{48}(1-\alpha)^2 + \frac{131}{960}(1-\alpha)^3 + \dots . \quad (46a)$$

Im Bereich  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  ist das Ergebnis also nicht wesentlich verschieden von demjenigen des ersten Falles.

3. Ist die Kristallenergie zu vernachlässigen, aber die Oberfläche rauh, so ist nur die dritte Summe in (38) von null verschieden. Ist ferner die Ausdehnung der Oberflächenausbeulungen groß gegen die Eindringtiefe, so kann man bei den wesentlichen

Summanden innerhalb der vom Wechselfeld erreichten Gebiete den Summanden prop.  $x$  im Exponenten streichen. Im Mittel über den Ort und über viele, statistisch unabhängige Oberflächenformen gleichen mittleren Verhaltens ergibt sich dann

$$\left( \frac{H_{sz} - H_0}{H_0} \right)^2 = (1 - \alpha)^2 \sum_l \frac{\overline{f_l f_l^* h_{lz}^4}}{(\alpha \sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2} + \sqrt{h_{ly}^2 + \alpha h_{lz}^2})^2} \quad (47)$$

Darin ist nach (32)

$$\overline{f_l} = \frac{1}{L^2} \iint_{y, z} f(y, z) e^{-i(h_{ly} y + h_{lz} z)} dy dz \quad (48)$$

und somit

$$\overline{f_l f_l^*} = \frac{1}{L^4} \iiint_{y, z, y', z'} f(y, z) f(y', z') \cdot e^{i[h_{ly}(y' - y) + h_{lz}(z' - z)]} dy dz dy' dz'. \quad (49)$$

Wenn die Punkte  $y, z$ , und  $y', z'$  weit auseinander liegen, ist  $f(y, z)$  von  $f(y', z')$  statistisch unabhängig. Da  $f$  im Mittel null ist, gilt dann  $\overline{f(y, z) f(y', z')} = 0$ . Für  $y' = y$  und  $z' = z$  ist natürlich

$$\overline{f(y, z) f(y', z')} = \overline{f^2} \neq 0.$$

$\overline{f^2}$  ist ein Maß für die mittlere Größe der Rauigkeit und unabhängig vom Ort. Für die Abhängigkeit dieses Mittelwertes vom Abstand der beiden Punkte nehmen wir folgende Formel als gültig an:

$$\overline{f(y, z) f(y', z')} = \overline{f^2} e^{-[(y-y')^2 + (z-z')^2]/c^2}. \quad (50)$$

Die Länge  $c$  gibt dann die mittlere Ausdehnung der Oberflächenausbeulungen an. Die Annahme, daß dieser Mittelwert nur vom Abstand  $\sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2}$  abhängt, bedeutet, daß die Welligkeit der Oberfläche keine Richtung auszeichnet, eine Bedingung, die möglicherweise verletzt ist, wenn die Unregelmäßigkeiten durch plastisches Dehnen in einer Richtung erzeugt werden. Mit (50) läßt sich (47) leicht auswerten und liefert

$$\left( \frac{H_{sz} - H_0}{H_0} \right)^2 = \frac{4 \overline{f^2}}{c^2} J(\alpha) \quad (51)$$

$$\text{mit } J(\alpha) = \frac{(1-\alpha)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \varphi}{(\alpha + \sqrt{\sin^2 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi})^2} d\varphi.$$

Das ist ein elliptisches Integral. Seine Potenzreihenentwicklung nach  $(1-\alpha)$  beginnt

$$J(\alpha) = \frac{3}{32} (1-\alpha)^2 + \frac{17}{128} (1-\alpha)^3 + \frac{1231}{8192} (1-\alpha)^4 + \dots .$$

Für  $\alpha = \frac{1}{2}$  erhält man etwa  $J(\frac{1}{2}) = 0,059$ . Die Tatsache, daß  $[(H_{sz} - H_0)/H_0]^2$  nicht von  $\overline{f^2}$  abhängt, sondern von  $\overline{f^2}/c^2$ , bedeutet anschaulich, daß das Streufeld nicht von der Größe der Ausbeulungen, sondern vom Winkel zwischen der wirklichen Oberfläche und der makroskopischen, mittleren Oberfläche abhängt. Dieser Winkel zwischen der  $z$ -Achse und der Oberfläche bestimmt die Größe der Quellen des Streufeldes. Unter den gleichen Annahmen wie oben ergibt sich

$$\overline{\text{grad}^2 f} = 4 \overline{f^2}/c^2.$$

Wenn  $|\overline{\text{grad} f}|$  im Mittel 0,2 ist, was bei plastisch gerecktem Material leicht der Fall sein kann, so ergibt sich demnach bei  $\alpha = \frac{1}{2}$  ungefähr

$$\sqrt{[(H_{sz} - H_0)/H_0]^2} = 0,05.$$

Die gemessenen Werte der relativen Halbwertsbreiten liegen in der gleichen Größenordnung. An Metalloberflächen mit diesem Rauigkeitsgrad kann also die Verbreiterung der Resonanzkurve nur auf diesem Effekt beruhen.

### III. Die Integration der Maxwell'schen Gleichungen für sehr kleine Kristallite

Bei der Berechnung des Einflusses der magnetischen Inhomogenitäten auf die ferromagnetische Resonanz betrachten wir die bereits bei der Feldberechnung behandelten Extremfälle getrennt. Wir beginnen mit dem Fall, daß die Ausdehnung der Kristallite und die mittlere Breite der Ausbeulungen der Oberfläche sehr klein gegen die Eindringtiefe ist. In dem größten Teil des Volumens, in welchem eine Wechselmagnetisierung merklich ist, sind dann die von der Oberfläche herrührenden Anteile des Streufeldes klein und können vernachlässigt werden. Alle Summanden in dem ortsabhängigen Anteil  $\alpha^{(1)}$  des Tensors der reziproken Permeabilität sind dann nach (22) proportional zu dem Faktor

$$\varepsilon = \frac{2K}{MH_0} (\ll 1). \quad (53)$$

Bei Vernachlässigung des Verschiebungsstromes ergibt sich aus den MAXWELLSchen Gleichungen für die komplexen Amplituden des periodischen Feldanteiles nach Elimination von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  die Gleichung

$$\text{rot} \alpha \text{rot} \tilde{\mathfrak{F}} = k_0^2 \tilde{\mathfrak{F}} \text{ mit } k_0^2 = -i\omega \mu_0 \sigma \quad (54)$$

( $\sigma$  = elektrische Leitfähigkeit). Darin ist  $\alpha$  der in (15) definierte ortsabhängige Tensor. Eine Integra-

tion dieser Gleichung ist uns nur näherungsweise gelungen für den Fall, daß die zu  $\epsilon$  proportionalen ortsabhängigen Anteile  $\zeta_{jk}^{(1)}$  der Tensorkomponenten klein gegen ihre Mittelwerte  $\bar{\zeta}_{jk}$  sind. Das bedeutet nach (20)  $\epsilon \ll a$  und  $\epsilon \ll b$ . Da  $b$  von der Größenordnung 1 ist, ist die zweite Bedingung stets erfüllt. Der erste gilt nur, wenn die Frequenz nicht zu nahe an der Resonanz liegt, so daß  $\epsilon \ll \Delta\omega/\omega_0$  ist oder wenn der Einfluß der Inhomogenitäten klein gegen den der LANDAU-LIFSHITZ-Dämpfung ist, also  $\epsilon \ll \delta$ . Mit dem Ansatz

$$\tilde{\mathfrak{E}} = \tilde{\mathfrak{E}}^{(0)} + \tilde{\mathfrak{E}}^{(1)} + \tilde{\mathfrak{E}}^{(2)} + \dots \quad (55)$$

erhält man für das Feld  $\tilde{\mathfrak{E}}^{(0)}$  in nullter Näherung

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{E}}^{(0)} - k_0^2 \tilde{\mathfrak{E}}^{(0)} = 0. \quad (56 \text{ a})$$

Für die Korrektur 1. Näherung  $\tilde{\mathfrak{E}}^{(1)}$  folgt

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{E}}^{(1)} - k_0^2 \tilde{\mathfrak{E}}^{(1)} = - \operatorname{rot} \zeta^{(1)} \operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{E}}^{(0)} \quad (56 \text{ b})$$

und für  $\tilde{\mathfrak{E}}^{(2)}$

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{E}}^{(2)} - k_0^2 \tilde{\mathfrak{E}}^{(2)} = - \operatorname{rot} \zeta^{(1)} \operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{E}}^{(1)}. \quad (56 \text{ c})$$

$\tilde{\mathfrak{E}}^{(0)}$  ist das elektrische Feld im Idealfall eines homogenen Materials, welches nur eine  $z$ -Komponente hat. Sie lautet

$$\tilde{E}_z^{(0)} = A e^{-[(ik_0/Va)x]}. \quad (57)$$

Das Vorzeichen von  $Va$  ist dabei so zu wählen, daß der Realteil von  $ik_0/Va$  positiv ist, da das Feld mit wachsendem Abstand von der Oberfläche abnehmen muß. Zur Integration von (56 b) setzen wir für die Komponenten von  $\zeta^{(1)}$  eine FOURIER-Reihe der Form (25) an. Unter obigen Annahmen ist in allen wesentlichen Gliedern dieser Reihe  $|\mathbf{f}_j| \gg |k_0/Va|$ . Mit einem entsprechenden FOURIER-Ansatz für  $\tilde{\mathfrak{E}}^{(1)}$  findet man ohne besondere Schwierigkeit nach längerer Rechnung eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Da jede Komponente von  $\zeta^{(1)}$  im Mittel über viele verschiedene Verteilungen und Orientierungen der Kristallite verschwindet, ist auch  $\tilde{\mathfrak{E}}^{(1)}$  im Mittel null, weil es linear von  $\zeta^{(1)}$  abhängt. Auf die Eigenschaften eines Hohlraumresonators hat dieses Korrekturfeld erster Näherung daher keinen Einfluß, da diese nur von den Mittelwerten des Feldes über die hier betrachteten Unregelmäßigkeiten abhängen.

Wir müssen also weiterhin die zweite Näherung  $\tilde{\mathfrak{E}}^{(2)}$  berechnen, welche quadratisch von  $\zeta^{(1)}$  abhängt, also proportional  $\epsilon^2$  ist. Das ist scheinbar inkon-

sequent, da wir vorn bei der Ableitung von (19) bereits Glieder prop.  $\epsilon^2$  vernachlässigt haben. Bei Durchführung der hier angedeuteten Störungsrechnung zeigt sich aber, daß  $\tilde{\mathfrak{E}}$  als Reihenentwicklung nach Potenzen verschiedener Quotienten geschrieben werden kann, deren Zähler proportional  $\epsilon$  ist, während im Nenner ein in  $a$  und  $b$  linearer Ausdruck steht, der von der Richtung des Vektors  $\mathbf{f}_j$  der FOURIER-Koeffizienten abhängt. Hätte man vorn die Näherungsrechnung weitergetrieben, so wären im Zähler dieser Quotienten Summanden prop.  $\epsilon^2$  hinzugekommen, die ebenfalls zum Mittelwert über  $\tilde{\mathfrak{E}}^{(1)}$  keinen Beitrag liefern. Bei  $\tilde{\mathfrak{E}}^{(2)}$  wären dann außer den Summanden proportional  $\epsilon^2$  noch weitere proportional  $\epsilon^3$  aufgetreten, die wegen  $\epsilon \ll 1$  vernachlässigt werden können. Trotz der Vernachlässigung der Glieder proportional  $\epsilon^2$  in (22) liefert also diese Rechnung in zweiter Näherung  $\tilde{\mathfrak{E}}$  bis zu den Gliedern proportional  $\epsilon^2$  richtig. Da  $b$  größenordnungsmäßig 1 ist und  $a \ll 1$ , sind bei der Mittelung über  $\tilde{\mathfrak{E}}$  diejenigen Summanden am wichtigsten, bei denen der Faktor bei  $b$  im Nenner verschwindet. Das sind diejenigen, bei denen  $\mathbf{f}_j$  senkrecht zum Gleichfeld steht.

Auf die Wiedergabe der langwierigen Rechnungen sei hier verzichtet. Für das gemittelte Feld erhält man in 2. Näherung einen Ausdruck der Form (57), nur ist darin  $a$  durch  $a + \Delta a$  zu ersetzen. Die meisten Summanden des ziemlich komplizierten Ausdrückes für  $\Delta a$  sind reell und unabhängig von  $\omega$  und entsprechen daher, wie ein Vergleich mit (20) zeigt, nur einer geringfügigen Verschiebung der Resonanzfrequenz  $\omega_0$ . Genau an der Resonanzstelle, wo der Realteil von  $a$  verschwindet, wirkt der Imaginärteil von  $\Delta a$  wie ein Ersetzen von  $\delta$  in (20) durch

$$\delta_{\text{eff}} = \delta + \left( \frac{2K}{MH_0} \right)^2 \frac{1}{V\delta} L(\alpha). \quad (58)$$

Für kubische Kristalle ist

$$L_{\text{kub}}(\alpha) = \frac{\pi}{840\sqrt{2}} \frac{\alpha^{3/4}(85+106\alpha+229\alpha^2)}{\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1+\alpha^3}}, \quad (58 \text{ a})$$

also für  $\alpha = \mu_0 H_0/B_0 = \frac{1}{2}$  etwa  $L_{\text{kub}}(\alpha) = 0.24$ . Für hexagonale Kristalle gilt

$$L_{\text{hex}}(\alpha) = \frac{\pi\alpha^{3/4}(5+14\alpha+5\alpha^2)}{60\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1+\alpha^3}\sqrt{2}}, \quad (58 \text{ b})$$

also für  $\alpha = \frac{1}{2}$  etwa  $L_{\text{hex}}(\frac{1}{2}) = 0.225$ , d. h. fast dasselbe wie für kubische Kristalle.

#### IV. Der Fall großer Kristallite und Oberflächenausbeulungen

Wenn die Komponenten von  $\mathbf{z}$  und die Neigung der Oberflächennormalen gegen die mittlere Normalenrichtung sich auf einer Strecke von der Größe der Eindringtiefe nur sehr wenig ändern, ist die Feldverteilung im Innern des Metalles an jeder Stelle angenähert so, wie wenn das lokale  $\mathbf{z}$  überall vorhanden wäre. Da der komplexe Brechungsindex in Metallen einen sehr großen Betrag hat, ist das Feld im Innern daher an jeder Stelle nahezu eine ebene Welle, die senkrecht zur lokalen Normalenrichtung fortschreitet. Ist die Oberfläche durch  $x = f(y, z)$  gegeben, so ist der Vektor mit den Komponenten  $(-1; \partial f / \partial y = f_y; \partial f / \partial z = f_z)$  senkrecht zur Oberfläche. Man kann also fürs Metallinnere den Ansatz machen

$$\tilde{\mathfrak{E}} = \mathfrak{A} e^{-i k(x - y f_y - z f_z)} \quad (59)$$

mit einem in erster Näherung konstanten  $\mathfrak{A}, f_y, f_z$ . Für die Komponenten des komplexen Vektors  $\mathfrak{A}$  erhält man dann beim Einsetzen in (54) ein homogenes lineares Gleichungssystem. Darin vernachlässigen wir alle in  $f_y$  und  $f_z$  quadratischen Glieder, sowie das Produkt aus  $f_y$  und  $\mathbf{z}_{xy} + \mathbf{z}_{yx}$ , weil letztere Summe nach (19) ebenfalls klein ist. Dann erhält man beim Nullsetzen der Koeffizientendeterminante eine von  $f$  unabhängige quadratische Gleichung für  $k^2$ . Der Imaginärteil von  $k$  muß stets negativ sein, weil die Amplitude der Welle beim Fortschreiten ins Metallinnere abnimmt. Daher erhält man für  $k$  zwei Werte und damit die folgenden zwei Lösungen der Form (59) für das elektrische Feld:

$$1. \quad k = k_0$$

$$\text{Komponenten von } \mathfrak{A}: \left( C_1 f_y; C_1; -\frac{\mathbf{z}_{yx}}{1-\mathbf{z}_{yy}} f_z C_1 \right); \quad (60)$$

$$2. \quad k = k_0 / \sqrt{\mathbf{z}_{yy}}$$

$$\text{Komponenten von } \mathfrak{A}: \left( C_2 f_z; C_2 \frac{\mathbf{z}_{xy}}{1-\mathbf{z}_{yy}} f_z; C_2 \right). \quad (61)$$

$C_1$  und  $C_2$  bleiben willkürlich. Beim Anpassen dieser Lösungen an die Randbedingungen werden wir jedoch  $C_1$  und  $C_2$  als abhängig von  $y$  und  $z$  annehmen müssen. Die obigen Formeln liefern, wie man sich leicht überzeugt, auch dann noch näherungsweise Lösungen von (54), sofern die relativen Änderungen von  $C_1$  und  $C_2$  ebenso wie diejenigen von  $f_y, f_z$  und den Komponenten von  $\mathbf{z}$  auf einer Strecke der

Größenordnung  $1/|k_0|$  als klein von höherer Ordnung gegen 1, also auch noch als klein gegen  $f_y$  und  $f_z$  vernachlässigt werden können.

Das zu (60) und (61) gehörige Magnetfeld hat die Form  $\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{C} e^{-i k(x - y f_y - z f_z)}$ . Für die komplexe Amplitude  $\mathfrak{C}$  erhält man in gleicher Näherung

$$\text{für } k = k_0: \quad (62)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{k_0 C_1}{\omega \mu_0} \left( \left( \mathbf{z}_{xx} + \frac{\mathbf{z}_{xy} \mathbf{z}_{yx}}{1-\mathbf{z}_{yy}} \right) f_z; -\frac{\mathbf{z}_{yx}}{1-\mathbf{z}_{yy}} f_z; 1 \right);$$

$$\text{für } k = \frac{k_0}{\sqrt{\mathbf{z}_{yy}}}: \quad$$

$$\mathfrak{C} = \frac{k_0 C_2}{\omega \mu_0} \left( -\frac{\mathbf{z}_{xy} + \mathbf{z}_{xx} f_y}{\sqrt{\mathbf{z}_{yy}}}; -\frac{\mathbf{z}_{yy} + \mathbf{z}_{yx} f_y}{\sqrt{\mathbf{z}_{yy}}} ; \frac{\mathbf{z}_{xy} f_z}{\sqrt{\mathbf{z}_{yy}(1-\mathbf{z}_{yy})}} \right) \quad (63)$$

Die Randbedingungen an der Oberfläche fordern die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\tilde{\mathfrak{H}}$  bzw. die Stetigkeit von  $\tilde{E}_x f_y + \tilde{E}_y, \tilde{E}_x f_z + \tilde{E}_z, \tilde{H}_x f_y + \tilde{H}_y, \tilde{H}_x f_z + \tilde{H}_z$ . Nun ist zu beachten, daß im Vakuum im Idealfall eines homogenen Metalles mit ideal glatter Oberfläche das elektrische Wechselfeld im Hohlraumresonator parallel zum magnetischen Gleichfeld, also parallel zur  $z$ -Achse ist und das magnetische Feld senkrecht dazu parallel zur  $y$ -Achse. Im Vakuum verschwindet also  $\tilde{E}_x$  und  $\tilde{H}_x$  in nullter Näherung, so daß wir dort  $\tilde{E}_x f_y, \tilde{E}_x f_z, \tilde{H}_x f_y$  und  $\tilde{H}_x f_z$  als klein von höherer Ordnung vernachlässigen können. Im Metall ist  $\tilde{E}_x$  auch klein, weil es nach (60) und (61) proportional zu  $f_y$  und  $f_z$  ist, wegen des Tensorcharakters von  $\mathbf{z}$  aber nicht  $\tilde{H}_x$ . Bei Vernachlässigung aller Quadrate von  $f_y, f_z$  und  $(\mathbf{z}_{xy} + \mathbf{z}_{yx})$  lauten demnach die Randbedingungen

$$C_1 + C_2 \frac{\mathbf{z}_{xy}}{1-\mathbf{z}_{yy}} f_z = \tilde{E}_y, \quad (64)$$

$$-\frac{\mathbf{z}_{yx}}{1-\mathbf{z}_{yy}} f_z C_1 + C_2 = \tilde{E}_z, \quad (65)$$

$$\frac{k_0 C_1}{\omega \mu_0} \frac{\mathbf{z}_{yx}}{1-\mathbf{z}_{yy}} f_z - \frac{k_0 C_2}{\omega \mu_0} \sqrt{\mathbf{z}_{yy}} = \tilde{H}_y, \quad (66)$$

$$\frac{k_0 C_1}{\omega \mu_0} + \frac{k_0 C_2}{\omega \mu_0} \frac{\mathbf{z}_{xy} \sqrt{\mathbf{z}_{yy}}}{1-\mathbf{z}_{yy}} f_z = \tilde{H}_z. \quad (67)$$

Die Feldkomponenten auf der rechten Seite bedeuten darin die Randwerte im Vakuum. Da in nullter Näherung  $\tilde{E}_y$  verschwindet, folgt aus (64) dasselbe für  $C_1$ . Die ersten Summanden auf den linken Seiten von (65) und (66) kann man daher als klein von höherer Ordnung streichen. Elimination von  $C_1$  und  $C_2$  liefert dann als Randbedingung für die Feld-

komponenten im Vakuum:

$$-\frac{k_0}{\omega \mu_0} \tilde{E}_z \sqrt{\chi_{yy}} = \tilde{H}_y, \quad (68)$$

$$\frac{k_0}{\omega \mu_0} \left( \tilde{E}_y - \frac{\chi_{xy}}{1 + \sqrt{\chi_{yy}}} f_z \tilde{E}_z \right) = \tilde{H}_z. \quad (69)$$

Die erste dieser Bedingungen lautet genauso wie bei exakt ebener Oberfläche, nur ist  $\chi_{yy}$  wegen des Einflusses der Kristallenergie und des Streufeldes ortsabhängig. Die zweite Gleichung wird, wie sich gleich zeigen wird, bei der Berechnung der meßbaren Größen nicht benötigt.

Bei der Berechnung des Feldes im Vakuum nehmen wir an, daß eine ebene Welle mit einem elektrischen Feld parallel zur  $z$ -Achse auf die im Groben ebene Oberfläche auftrifft. Im Idealfall wird dann eine ebensolche Welle reflektiert. Das Reflexionsvermögen  $R_0$  hängt von dem Verhältnis  $\tilde{H}_y/\tilde{E}_z$  an der Oberfläche ab. Die Ortsabhängigkeit von  $\chi_{yy}$  bewirkt, daß außerdem reflektierte Wellen auftreten, deren Feldvektoren von  $y$  und  $z$  abhängen. Zu ihrer Berechnung entwickeln wir  $\chi_{yy}$  innerhalb eines Quadrates der Fläche  $L^2$  in eine FOURIER-Reihe und setzen diesen Verlauf außerhalb periodisch mit der Periode  $L$  fort. Wenn  $L$  groß gegen die mittlere Kristallitgröße und Ausdehnung der Oberflächenausbeulungen ist, hat das keinen Einfluß auf die mittleren Eigenschaften der Oberfläche. Das durch die Unregelmäßigkeiten entstehende Störfeld können wir dann ebenfalls in eine FOURIER-Reihe nach  $y$  und  $z$  mit der Periode  $L$  entwickeln. Da die Kristallite stets sehr klein gegen die Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$  sind, dürfen wir annehmen, daß  $L$  auch noch klein gegen  $\lambda_0$  ist. Dann fällt jeder einzelne FOURIER-Koeffizient des Störfeldes exponentiell mit dem Abstand von der Oberfläche ab. In einem gegen die Kristallitabmessungen großen Abstand kann daher aus der Verteilung der Felder nur noch das Reflexionsvermögen  $R_0$  erschlossen werden bzw. das mit  $R_0$  zusammenhängende Verhältnis der Mittelwerte von  $\tilde{H}_y$  und  $\tilde{E}_z$  an der Oberfläche. Die Schwingeigenschaften eines Hohlraumresonators, dessen Abmessungen stets vergleichbar mit  $\lambda_0$ , also groß gegen  $L$  sind, hängen von dem gleichen Ver-

hältnis ab.  $R_0$  ist demnach die einzige meßbare Oberflächeneigenschaft und soll daher für eine inhomogene Oberfläche berechnet werden.

Im Vakuum genügt die komplexe Amplitude  $\tilde{\mathfrak{E}}$  des elektrischen Feldes der Gleichung

$$\Delta \tilde{\mathfrak{E}} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \tilde{\mathfrak{E}} = 0 \quad (70)$$

( $c_0$  = Vakuumlichtgeschwindigkeit). Ist  $\mathbf{e}_z$  ein Einheitsvektor in  $z$ -Richtung, so lautet die einfallende ebene Welle

$$\tilde{\mathfrak{E}}_e = A \mathbf{e}_z e^{-i \omega x/c_0}. \quad (71 \text{ a})$$

Die reflektierte Welle lautet

$$\tilde{\mathfrak{E}}_r = A R_0 \mathbf{e}_z e^{+i \omega x/c_0}. \quad (71 \text{ b})$$

Für den elektrischen Anteil des Störfeldes machen wir den Ansatz

$$\tilde{\mathfrak{E}}_{st} = A \sum_l \mathfrak{D}_l e^{i(\mathfrak{h}_l \tau) + x \sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2 - \omega^2/c_0^2}}. \quad (71 \text{ c})$$

Darin ist  $\mathfrak{h}_l$  ein Vektor mit den Komponenten

$$\left( 0; \frac{2\pi}{L} n_{yl}; \frac{2\pi}{L} n_{zl} \right).$$

Die Summe läuft über alle Paare von ganzen Zahlen  $n_{yl}$ ,  $n_{zl}$  mit Ausnahme von  $n_{yl} = n_{zl} = 0$ . Diese Summe befriedigt bei konstantem  $\mathfrak{D}_l$  Gl. (70). Die weitere Bedingung  $\operatorname{div} \tilde{\mathfrak{E}} = 0$  liefert

$$D_{lx} = - \frac{i(h_{ly} D_{ly} + h_{lz} D_{lz})}{\sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2 - \omega^2/c_0^2}}. \quad (72)$$

Das zugehörige Magnetfeld folgt aus  $\tilde{\mathfrak{H}} = \frac{i}{\omega \mu_0} \operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{E}}$  und beträgt bei der einfallenden Welle

$$\tilde{\mathfrak{H}}_e = - \frac{A}{c_0 \mu_0} \mathbf{e}_y e^{-i \omega x/c_0}, \quad (73 \text{ a})$$

bei der reflektierten Welle

$$\tilde{\mathfrak{H}}_r = \frac{A}{c_0 \mu_0} R_0 \mathbf{e}_y e^{+i \omega x/c_0} \quad (73 \text{ b})$$

und beim Störfeld

$$\tilde{\mathfrak{H}}_{st} = A \sum_l \mathfrak{D}_l e^{i(\mathfrak{h}_l \tau) + x \sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2 - \omega^2/c_0^2}}. \quad (73 \text{ c})$$

Die Komponenten von  $\mathfrak{D}_l$  lauten

$$\mathfrak{D}_l = \left( \frac{D_{ly} h_{lz} - D_{lz} h_{ly}}{\omega \mu_0}; \frac{i h_{ly} h_{lz} D_{ly} - i(h_{ly}^2 - \omega^2/c_0^2) D_{lz}}{\omega \mu_0 \sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2 - \omega^2/c_0^2}}; \frac{i(h_{lz}^2 - \omega^2/c_0^2) D_{ly} - i h_{ly} h_{lz} D_{lz}}{\omega \mu_0 \sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2 - \omega^2/c_0^2}} \right). \quad (74)$$

Einsetzen in die Randbedingung (68) liefert

$$1 - R_0 - \frac{c_0 k_0}{\omega} \sqrt{\chi_{yy}} (1 + R_0) = \frac{c_0}{\omega} \left\{ \sum_l \frac{i h_{ly} h_{lz} D_{ly} - i(h_{ly}^2 - \omega^2/c_0^2) D_{lz}}{\sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2 - \omega^2/c_0^2}} e^{i(\mathfrak{h}_l \tau)} + k_0 \sqrt{\chi_{yy}} \sum_l D_{lz} e^{i(\mathfrak{h}_l \tau)} \right\}. \quad (75)$$

Aus der Randbedingung (69) folgt eine lineare Beziehung zwischen  $D_{ly}$ ,  $D_{lz}$  und dem  $l$ -ten FOURIER-Koeffizienten von  $\frac{z_{xy}}{1 + \sqrt{z_{yy}}} f_z$ . Einsetzen der FOURIER-Entwicklung für  $\sqrt{z_{yy}}$  in (75) würde zusammen mit dieser Beziehung ein unendliches Gleichungssystem für  $D_{ly}$  und  $D_{lz}$  ergeben.

Die schwierige Aufgabe von dessen Auflösung wollen wir vermeiden, indem wir im folgenden nur zwei Extremfälle ins Auge fassen. Bezeichnet man mit  $c$  die mittlere Ausdehnung der Kristallite bzw. die Kohärenzlänge der Oberflächenrauhigkeit [vgl. (50)], so ist bei den wesentlichen Gliedern der obigen FOURIER-Reihe  $\sqrt{h_{ly}^2 + h_{lz}^2}$  Größenordnungsmäßig gleich  $1/c$  und groß gegen  $\omega/c_0 = 2\pi/\lambda_0$ . Ferner ist  $|k_0/\sqrt{z_{yy}}|$  angennähert gleich der ortsabhängigen reziproken Eindringtiefe  $1/\zeta$  der Wirbelströme. Wir betrachten hier nur den Fall, daß  $c \gg \zeta$  ist. Wenn in der Resonanz  $|z_{yy}|$  nicht zu klein wird, kann auch noch überall  $c \gg |\zeta/z_{yy}|$  sein. Dann ist auf der rechten Seite von (75) die erste Summe überall klein gegen die zweite. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Koeffizienten  $D_{ly}$  und  $D_{lz}$  die gleiche Größenordnung haben, was bei regelloser Verteilung der Kristallite und Oberflächenausbeulungen plausibel ist und unter Heranziehung der zweiten Randbedingung (69) auch genauer begründet werden kann. Vernachlässigt man die erste Summe auf der rechten Seite von (75), dividiert durch  $\sqrt{z_{yy}}$  und bildet den Mittelwert, so verschwindet die rechte Seite, weil die zweite Summe keinen Summanden mit  $h_l = 0$  enthält. Dann erhält man also:

$$\frac{1+R_0}{1-R_0} = \frac{\omega}{c_0 k_0} \left( \frac{1}{\sqrt{z_{yy}}} \right). \quad (76)$$

Für ein homogenes nicht gyromagnetisches Material der Permeabilität  $\mu$  erhält man für das Reflexionsvermögen die Gleichung

$$\frac{1+R_0}{1-R_0} = \frac{\omega}{c_0 k_0} \sqrt{\mu}. \quad (77)$$

Wenn also die Eindringtiefe  $\zeta$  mal der Permeabilität  $\mu = |1/z_{yy}|$  für ein Wechselfeld senkrecht zum Gleichfeld überall klein gegen die mittlere Ausdehnung  $c$  der Kristallite und Oberflächenausbeulungen ist, verhält sich das inhomogene Medium mit rauher Oberfläche genauso wie ein homogenes Medium mit glatter Oberfläche, dessen effektive Permeabilität  $\mu_{\text{eff}}$  durch

$$\sqrt{\mu_{\text{eff}}} = \left( \frac{1}{\sqrt{z_{yy}}} \right) \quad (78)$$

gegeben ist.

Ist die Dämpfungskonstante  $\delta$  klein, so kann es in nächster Nähe der Resonanzstelle vorkommen, daß trotz der Bedingung  $c \gg \zeta$  noch überall  $c \ll \zeta/|z_{yy}|$  ist. Bei so kleinem  $|z_{yy}|$  bzw. so großer Permeabilität  $\mu$  ist die zweite Summe auf der rechten Seite von (75) klein gegen die erste. Bei Vernachlässigung der zweiten liefert dann die einfache Mittelung die Gleichung

$$\frac{1-R_0}{1+R_0} = \frac{c_0 k_0}{\omega} \sqrt{\zeta} \quad (79)$$

$$\text{oder } \frac{1}{\sqrt{\mu_{\text{eff}}}} = \sqrt{\zeta}. \quad (79 \text{ a})$$

In diesem Fall ist also  $z_{yy}$  in anderer Weise zu mitteln. Wenn keine der genannten Bedingungen erfüllt ist, wenn also  $|\zeta/z_{yy}|$  stellenweise groß und stellenweise klein gegen  $c$  ist, läßt sich  $\mu_{\text{eff}}$  nicht so einfach berechnen. Doch liegt dann das Ergebnis wahrscheinlich zwischen denen für diese Extremfälle.

Die weitere Auswertung beschränken wir auf die Fälle, daß der Einfluß der Inhomogenitäten entweder sehr klein oder sehr groß gegen denjenigen der LANDAU-LIFSHITZ-Dämpfung ist. Bei kleinem Einfluß setzen wir  $z_{yy} = a + z_{yy}^{(1)}$  und entwickeln nach Potenzen von  $z_{yy}^{(1)}/a$ . Dann erhält man im Fall  $c \gg \zeta/a$

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{z_{yy}^{(1)}}{a} \right)^2 \right) \quad (80)$$

und im Fall  $c \ll \zeta/a$

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{z_{yy}^{(1)}}{a} \right)^2 \right). \quad (81)$$

Genau an der Resonanzstelle ergibt sich daraus bei Beachtung von (20)

$$\mu_{\text{eff}} = - \frac{i(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha}(1+\alpha) \delta} \left( 1 - \frac{(3 \text{ bzw. } 1)}{4} \cdot \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha(1+\alpha)^2 \delta^2} (z_{yy}^{(1)})^2 \right). \quad (82)$$

Für denjenigen Wert von  $\Delta\omega/\omega_0$ , an dem der Imaginärteil von  $\mu_{\text{eff}}$  die Hälfte des obigen Wertes annimmt, erhält man nach kurzer Rechnung

$$\left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{1/2} = \frac{1+\alpha}{2} \delta \left( 1 + \frac{(9 \text{ bzw. } 3)}{8} \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha(1+\alpha)^2 \delta^2} (z_{yy}^{(1)})^2 \right). \quad (83)$$

Beide Resultate kann man zusammenfassen zu der Aussage: Den Inhomogenitäten trägt man Rechnung, indem man  $\delta$  ersetzt durch

$$\delta_{\text{eff}} = \sqrt{\delta^2 + \beta \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha(1+\alpha)^2} (z_{yy}^{(1)})^2}. \quad (84)$$

Dabei ist der Zahlenfaktor  $\beta$  gleich  $3/2$  bzw.  $1/2$  oder  $9/4$  bzw.  $3/4$ , je nachdem ob für die mittlere Ausdehnung der Kristallite oder die Kohärenzlänge  $c$  der Oberflächenausbeulungen  $c \gg \zeta/a$  bzw.  $c \ll \zeta/a$  gilt und ob man  $\delta$  aus dem maximalen Wert des Imaginärteiles der Permeabilität in der Resonanz oder aus der Frequenzabweichung an der Stelle des halben Maximalwertes des Imaginärteiles von  $\mu_{\text{eff}}$  ermittelt. Da sich der Beitrag der Inhomogenitäten zu  $\delta$  nicht linear, sondern quadratisch summiert, macht er sich demnach bei überwiegendem Einfluß der LANDAU-LIFSHITZ-Dämpfung bei großen Kristalliten ebenso wie im Fall sehr kleiner Kristallite praktisch gar nicht bemerkbar.

Wenn der Einfluß der Inhomogenitäten groß gegen  $\delta$  ist, kann man den Summanden prop.  $\delta$  in der

$$q^2 = \overline{\chi_{yy}^{(1)2}} = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} \left\{ (1+\alpha)^2 J(\alpha) \overline{\text{grad}^2 f} + \left( \frac{2K}{MH_0} \right)^2 \left[ \frac{1}{15} G(\alpha) + \frac{4}{15} (1+\alpha+\alpha^2) \right] \right\}. \quad (87 \text{ a})$$

Für einen kubischen Polykristall:

$$q^2 = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} \left\{ (1+\alpha)^2 J(\alpha) \overline{\text{grad}^2 f} + \left( \frac{2K}{MH_0} \right)^2 \left[ \frac{2}{105} G(\alpha) + \frac{29}{105} (1+\alpha^2) + \frac{22}{105} \alpha \right] \right\}. \quad (87 \text{ b})$$

$J(\alpha)$  und  $G(\alpha)$  sind dabei durch (51) und (46) gegeben. Für die effektive Permeabilität erhält man dann im Fall  $\zeta/|\chi_{yy}| \ll c$

$$\sqrt{\mu_{\text{eff}}} = \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\exp\{-\eta^2/2 q^2\}}{2\pi q^2 \left( \eta - \frac{2\alpha}{1-\alpha} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)}} d\eta \quad (88 \text{ a})$$

und im Fall  $\zeta/|\chi_{yy}| \gg c$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_{\text{eff}}}} = \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\exp\{-\eta^2/2 q^2\}}{\eta - \frac{2\alpha}{1-\alpha} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}} d\eta. \quad (88 \text{ b})$$

Dabei ist in dem Integrationsgebiet, wo  $\eta < \frac{2\alpha}{1-\alpha} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  ist, die Wurzel positiv imaginär zu wählen, da  $i k_0 / \sqrt{\chi_{yy}}$  stets einen positiven Realteil haben muß. Allerdings sind diese Formeln (88) streng genommen beide bedenklich, denn da hier  $\delta=0$  gesetzt wurde, durchläuft  $|\chi_{yy}| = \left| \eta - \frac{2\alpha}{1-\alpha} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right|$

in beiden

Integralen alle Werte zwischen null und unendlich, so daß die vorausgesetzten Ungleichungen niemals auf der ganzen Oberfläche erfüllt sind. Da jedoch in beiden Fällen nur das Gebiet um  $\eta \approx 0$  wesentlich zum Integral beiträgt, wird man annehmen dürfen,

Formel (19) für  $\chi_{yy}$  streichen. Dann ist  $\chi_{yy}$  reell. Zur Berechnung von  $\mu_{\text{eff}}$  muß man dann eine Annahme über die Verteilung der Werte von  $\chi_{yy}^{(1)}$  machen. Wir nehmen an: Der Bruchteil der Oberfläche, an welchem

$$\chi_{yy}^{(1)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ (1+\alpha) \frac{H_{sz}-H_0}{H_0} + T + \alpha U \right\} \quad (85)$$

zwischen  $\eta$  und  $\eta + d\eta$  liegt, beträgt

$$dW = \frac{1}{q \sqrt{2\pi}} e^{-\eta^2/2 q^2} d\eta. \quad (86)$$

Darin bedeutet  $q^2$  den Mittelwert des Quadrates von  $\chi_{yy}^{(1)}$ , für den sich aus den vorn mitgeteilten Rechnungen und einigen weiteren elementaren Rechnungen die folgenden Ausdrücke ergeben:

Für einen hexagonalen Polykristall:

daß bei sehr kleinem Einfluß der LANDAU-LIFSHITZ-Dämpfung gegenüber demjenigen der Inhomogenitäten die Formel (88 a) außerhalb der Resonanz gilt, wo  $\mu_{\text{eff}}$  klein ist, (88 b) dagegen nahe der Resonanzstelle, wenn dort  $|\mu_{\text{eff}}| \gg c/\zeta$  wird.

Die beiden Integrale (88 a) und (88 b) lassen sich durch die Funktionen des parabolischen Zylinders<sup>4</sup>

$$D_v(z) = \frac{e^{-z^2/4}}{\Gamma(-v)} \int_0^\infty \frac{e^{-zt-t^2/2}}{t^{v+1}} dt \quad (89)$$

ausdrücken. Mit

$$z = \frac{2\alpha}{(1-\alpha)} \frac{\Delta\omega}{\omega_0 q} \quad (90)$$

erhält man im Fall  $\zeta/|\chi_{yy}| \ll c$

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{1}{2q} e^{-z^2/2} (D_{-1/2}(z) - i D_{-1/2}(-z))^2 \quad (91)$$

und im Fall  $\zeta/|\chi_{yy}| \gg c$

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{8}{q} \frac{e^{z^2/2}}{(D_{-3/2}(z) + i D_{-3/2}(-z))^2}. \quad (92)$$

<sup>4</sup> Vgl. W. MAGNUS u. F. OBERHETTINGER, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1948, 2. Aufl., S. 120 ff.

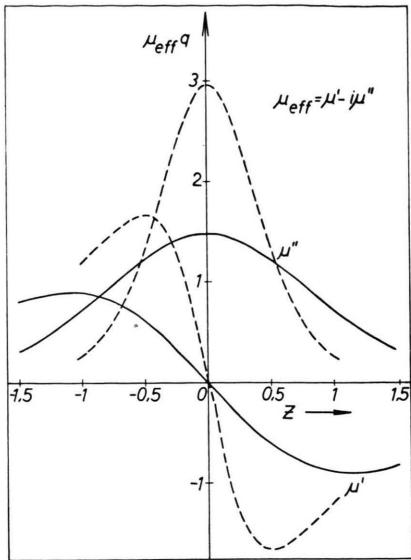


Abb. 1. Real- und Imaginärteil der effektiven Permeabilität mal der Wurzel  $q$  aus dem quadratischen Mittel der Abweichung der reziproken Permeabilität von ihrem Mittelwert in Abhängigkeit von der Größe  $z = \frac{2\alpha}{1-\alpha} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0 q}$

$$\left( z = \frac{\mu_0 H_0}{B_0}; \quad \omega_0 = \gamma \sqrt{\frac{H_0 B_0}{\mu_0}} = \text{Resonanzfrequenz} \right)$$

— für  $\zeta |\mu| \ll c$ , —— für  $\zeta |\mu| \gg c$ .

Diese Funktionen lassen sich mit Hilfe ihrer gut konvergierenden Reihenentwicklungen im Bereich  $|z| < 1,5$  leicht berechnen und liefern den in Abb. 1 dargestellten Verlauf von Real- und Imaginärteil von  $\mu_{\text{eff}}$ . Im Fall  $\zeta / |\chi_{yy}| \ll c$  ist danach die Resonanzkurve wesentlich breiter und flacher als in dem entgegengesetzten Extremfall. Für den Wert von  $\Delta\omega/\omega_0$  an der Stelle, wo der Imaginärteil gleich dem halben Maximalwert wird, erhält man im Fall  $\zeta / |\chi_{yy}| \ll c$

$$\left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\frac{1}{2}} = 0,99 \frac{1-\alpha}{2\alpha} q \quad (93)$$

und im Fall  $\zeta / |\chi_{yy}| \gg c$

$$\left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\frac{1}{2}} = 0,46 \frac{1-\alpha}{2\alpha} q. \quad (94)$$

Wenn also die Verbreiterung der Resonanzkurve nur von den Inhomogenitäten herrührt, verhält sich das Material qualitativ etwa so wie ein homogenes Material mit der effektiven Dämpfungskonstante

$$\delta_{\text{eff}} = 0,99 \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}} q \quad \text{falls } \zeta / |\chi_{yy}| \ll c, \quad (95 \text{ a})$$

$$\delta_{\text{eff}} = 0,46 \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}} q \quad \text{falls } \zeta / |\chi_{yy}| \gg c. \quad (95 \text{ b})$$

Da  $q^2 = (\chi_{yy}^{(1)})^2$  ist, würde sich bis auf einen etwas anderen Zahlenfaktor aus (84) dasselbe ergeben, wenn man darin  $\delta = 0$  setzt, ohne Rücksicht darauf, daß bei der Ableitung dieser Formel ein großes  $\delta$  vorausgesetzt wurde. Man wird daraus schließen dürfen, daß bis auf Zahlenfaktoren der Größenordnung 1 die Formel (84) vermutlich das Verhalten eines inhomogenen Materials mit einer im Vergleich zur Eindringtiefe großen Ausdehnung der Kristallite und Oberflächenausbeulungen stets richtig wiedergibt.

### V. Kurze Zusammenfassung der Ergebnisse

Der Einfluß der Inhomogenitäten und Oberflächenausbeulungen eines Metalls auf die Permeabilität in der Nähe der ferromagnetischen Resonanz kann formal erfaßt werden, indem man die Dämpfungskonstante  $\delta$  in der LANDAU-LIFSHITZ-Formel durch eine vergrößerte effektive Konstante  $\delta_{\text{eff}}$  ersetzt. Wenn der Einfluß der Oberflächenausbeulungen über den der LANDAU-LIFSHITZ-Dämpfung überwiegt, gilt

$$\delta_{\text{eff}} = \beta' \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}} q.$$

Darin ist  $\alpha = \mu_0 H_0 / B_0$ ;  $\beta'$  ist ein weiter unten angegebener Zahlenfaktor;  $q^2$  ist das mittlere Quadrat der Abweichung der reziproken Permeabilität  $1/\mu$  in Richtung des magnetischen Wechselfeldes parallel zur Oberfläche und senkrecht zur Gleichfeldmagnetisierung von ihrem Mittelwert. Wenn die Inhomogenitäten nur von dem magnetischen Streufeld infolge der rauhen, aber im Mittel ebenen Oberfläche  $x = f(y, z)$  herrühren, gilt

$$q^2 = \frac{\alpha^2(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} J(\alpha) \overline{\text{grad}^2 f}$$

mit

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \frac{(1-\alpha)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \varphi}{(\alpha + \sqrt{\sin^2 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi})^2} d\varphi \\ &\approx \frac{3}{32} (1-\alpha)^2 + \frac{17}{128} (1-\alpha)^3 + \dots . \end{aligned}$$

Dabei ist vorausgesetzt worden, daß die mittlere Ausdehnung  $c$  der einzelnen Oberflächenausbeulungen groß gegen die Eindringtiefe  $\zeta$  der Wirbelströme und ihre Verteilung isotrop ist. Ferner wurde angenommen, daß die verschiedenen Werte von  $1/\mu$  sich um ihren Mittelwert nach einer GAUSSSchen Fehlerkurve verteilen.

Wenn außer der Oberflächenrauhigkeit auch noch die Kristallenergie des im Mittel isotropen Poly-

kristalls eine Rolle spielt, kommt zu  $q^2$  ein weiterer Summand hinzu von der Form  $(2K/MH_0)^2$  mal einer Funktion von  $\alpha$ , die für kubische und hexagonale Kristalle verschieden lautet und in den Gln. (87) und (46) angegeben ist. Wenn der Einfluß der Inhomogenität klein gegen den der LANDAU-LIFSHITZ-Dämpfung ist, gilt

$$\delta_{\text{eff}} = \sqrt{\delta^2 + \beta \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha(1+\alpha)^2} q^2}.$$

Die Zahlenfaktoren  $\beta$  und  $\beta'$  lauten etwas verschieden, je nachdem ob der Maximalwert  $|\mu|_{\max}$  der (rein imaginären) Permeabilität an der Stelle der Resonanz oder die relative Abweichung  $(\Delta\omega/\omega_0)^{1/2}$  der Frequenz an der Stelle des halben Maximalwertes des Imaginärteiles der Permeabilität berechnet werden soll. Außerdem hängen sie davon ab, ob die mittlere Ausdehnung der Kristallite und der Oberflächenausbeulungen klein oder groß gegen das  $\mu$ -fache der Eindringtiefe  $\zeta$  ist. Für sie gilt folgende Tabelle:

Wenn keine der Bedingungen  $\mu\zeta \ll c$  oder  $\mu\zeta \gg c$  auf der ganzen Oberfläche erfüllt ist, gelten die obigen Ergebnisse vermutlich qualitativ auch, jedoch

	für $ \mu _{\max}$	für $(\Delta\omega/\omega_0)^{1/2}$
$\mu\zeta \ll c$	$\beta=1,5$ $\beta'=0,68$	$\beta=2,25$ $\beta'=0,99$
$\mu\zeta \gg c$	$\beta=0,5$ $\beta'=0,34$	$\beta=0,75$ $\beta'=0,46$

lassen sich dann die hier mitgeteilten Berechnungen nicht exakt durchführen.

Wenn die mittlere Ausdehnung der Kristallite und der Oberflächenausbeulungen klein gegen die Eindringtiefe ist, spielen die Oberflächeneffekte keine wesentliche Rolle. Den Einfluß der inneren Oberflächen und des durch sie verursachten inneren Streumagnetfeldes erfaßt man richtig mit der für  $2K/MH_0 \ll \delta \ll 1$  gültigen Formel

$$\delta_{\text{eff}} = \delta + \left( \frac{2K}{MH_0} \right)^2 \frac{1}{V\delta} L(\alpha).$$

Die Funktion  $L(\alpha)$  hängt vom Gittertyp ab und ist für hexagonale und kubische Kristalle durch die Gln. (58 a und b) gegeben.

Wir danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung dieser Arbeit durch Gewährung einer Beihilfe zur Bezahlung des einen von uns (H. V.).